代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.211-217



# 函数体上の一般Mordell予想について

東京工芸大工 前原和寿

Mordell - Bombieri - Noguchi による

**予想**. $k=\bar{k}$, ch.$k=0$, $K$ が $k$ 上有限生成の正則拡大体とし、$X$ を $K$ 上の一般型完備多様体とする. $K$-有理点の集合 $X(K)$ が稠密(即ち、任意の Zariski open $U \subseteq X$ に対して、$U(K) \neq \emptyset$)と仮定する. このとき $k$ 上の多様体 $X_0$ が存在して、$X \sim X_0 \otimes_k K$ が $K$-双有理同型となる.

Manin, Grauert 等によって $\dim X/K = 1$ のとき上の予想は証明されている。$\dim X/K = 2$ の特別な場合は Deschamps によって示されている. $\dim X/K$ が任意で、接ベクトル束 $\Theta_{X/K}$ が negative [6] のとき野口により証明された. 野口はさらに $X$ が hyperbolic のときにも証明している[∞].

この拙論では上の予想を $\Omega_{X/K}$ が ample の場合(上記の、$\Theta_{X/K} = \Omega_{X/K}$ の dual, が negative と同じ条件)に別証明を与える.

手法は、

$$f_* \omega_{Y/W}^{\otimes n} \text{ が pseudo-effective}$$

を応用することと、Deschamps の論法を駆使することである.

但し、連接層 $F$ が pseudo-effective $\Leftrightarrow$ $\exists$ line bundle $L$, $\forall \alpha >> 0$, $\exists \beta > 0$ に対して、次の標準射

$$H^0((F^{\otimes \alpha} \otimes L)^{\otimes \beta}) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow (F^{\otimes \alpha} \otimes L)^{\otimes \beta}$$

が生成点で全射.

定理. 上記予想で $X$ を $\Omega_{X/K}$ が ample の多様体と仮定すれば、予想は正しい.

証明. $X$ は non-singular, projective で、$\mathrm{tr.deg}_k K = 1$、と仮定してよい。

このとき $X/K$ の幾何学的モデルを

$$f : V \longrightarrow C$$

とする. 即ち、$K \simeq \mathrm{Rat}(C)$ ($= C$ の函数体), $f$ の generic fibre が $X$ となっているとする.

補題1. 完全列

$$0 \to f^*\Omega_C \longrightarrow \Omega_V \longrightarrow \Omega_{V/C} \longrightarrow 0$$

を考える. $\mathbb{P}(\Omega_V)$ ($\supset \mathbb{P}(\Omega_{V/C})$) の基本層を $\mathcal{O}(1)$ とし、$p : \mathbb{P}(\Omega_V) \to V$ を構造射、$g = f \cdot p$ とおくと

$$g^*g_*\mathcal{O}(\ell) \longrightarrow \mathcal{O}(\ell)$$

は $\mathbb{P}(\Omega_V) \otimes_C K$ 上全射である.

(∵) $\mathbb{P}(\Omega_V)$ 上で次の完全列がある

$$0 \to \mathcal{O}(\ell-1) \to \mathcal{O}(\ell) \to \mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{V/C})} \to 0.$$

$g_*$ の long exact sequence :

$$0 \to g_*\mathcal{O}(\ell-1) \to g_*\mathcal{O}(\ell) \to g_*(\mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{V/C})})$$

$$\to R^1g_*\mathcal{O}(\ell-1) \to R^1g_*\mathcal{O}(\ell) \to R^1g_*(\mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{V/C})})$$

は完全. $\mathbb{P}(\Omega_V) \otimes_C K \simeq \mathbb{P}(\Omega_X)$ 上では

$$0 \to H^0(\mathcal{O}(\ell-1)) \to H^0(\mathcal{O}(\ell)) \xrightarrow{c} H^0(\mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})})$$

$$\to H^1(\mathcal{O}(\ell-1)) \to H^1(\mathcal{O}(\ell)) \to H^1(\mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})})$$

も完全. 仮定から (ampleness の)

$$H^1(\mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})}) = 0 \quad \forall \ell \gg 0.$$

故に、減少列

$$h^1(\mathcal{O}(\ell-1)) \geq h^1(\mathcal{O}(\ell))$$

は停滞し、$^\forall \ell \gg 0$ に対して

$$h^1(\mathcal{O}(\ell-1)) = h^1(\mathcal{O}(\ell)),$$

従って $c$ は全射となり、$Bs|\mathcal{O}(\ell)| = \emptyset$ となる. Q.E.D.

注意. さらに

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\Omega_X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(\ell))) \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{P}(\Omega_{X/K}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(\ell)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})})) \end{array}$$

において $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(\ell)))$ の$^\exists$超平面 $A$ をとれば、$|\mathcal{O}(\ell)|$ は底点が無いから

$$\varphi^* A = \mathbb{P}(\Omega_{X/K})$$

と仮定できる. しかも $\varphi^* A \cong A$ であるから、$\varphi$ は birational morphism である. 同型にならない点の全体は、$\mathbb{P}(\Omega_{X/K})$ とは交わらない.

さて、$p: \mathbb{P}(\Omega_V) \longrightarrow V$ に戻って、$\{s_\lambda : C \longrightarrow V\}$ を予想の仮定にある稠密な有理点から定まる$f$のsection の全体とする. $C_\lambda = s_\lambda(C)$ とおいて、完全列：

$$0 \to f^*\Omega_C \to \Omega_V \to \Omega_{V/C} \to 0$$

を $C_\lambda$ に制限すると

$$f^*\Omega_C|_{C_\lambda} \rightleftarrows \Omega_V|_{C_\lambda}$$

という自然な splitting が得られる.

この splitting から下図を可換にするような sections が得られる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}(\Omega_V) \arrow[d] \\
C_\lambda \arrow[ur, "\sigma_\lambda"] \arrow[r, hook] & V
\end{tikzcd}
$$

$B_\lambda = \sigma_\lambda(C_\lambda)$ として、$Z =$ " $\mathbb{P}(\Omega_V)$ での $\cup B_\lambda$ の closure" とする．$Z$ の既約成分で、そこに含まれる $B_\lambda$ の像 $C_\lambda$ が $V$ で稠密になっているものがある．これを改めて $Z$ とおく．

<u>Case (i).</u> $\dim \varphi(Z) = \dim Z$ のとき．

$\mathcal{O}(\ell)$を$Z$へ制限したものを $\mathcal{O}_Z(\ell)$ とする．$\ell \gg 0$ にとれば、$\mathcal{O}_Z(\ell)$ に付随した正則写像は birational にできる．

$$\varphi_Z : Z \longrightarrow \varphi(Z).$$

このとき

$(\bigstar)$ ある多様体 $T$ と

$$C \times T \longrightarrow \varphi(Z)$$

という dominant rational map が存在する

($\bigstar$は[ ]を参照)．さらに、

$$
\begin{tikzcd}
C \times T \arrow[r] \arrow[dr] & Z \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[dl] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

という可換図式で、$C \times T \longrightarrow V$ が dominant となるから、[5]により、$V \sim V_0 \times C$ が $C$ 上双有理が示せる．

<u>Case (ii).</u> $\dim \varphi(Z) < \dim Z$ のとき．

このとき$Z$の生成点が $\mathbb{P}(\Omega_{V/C})$ に含まれていない．

補題 2. $\varphi : \mathbb{P}(\Omega_X) \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(\ell)))$
の退化集合を $S$ とすると
(a) $S \cap \mathbb{P}(\Omega_{X/K}) = \emptyset$.
(b) $\mathbb{P}(\Omega_X) \setminus S$ 上 $\varphi$ は quasi-finite.

$Z_K = Z \otimes_{\mathbb{C}} K$ とおいて、$Z_K \cap S \subsetneqq Z_K$ とすれば $Z_K$ の生成点で $\varphi$ は quasi-finite となり矛盾.
従って $Z_K \subseteqq S$, i.e. $Z_K \cap \mathbb{P}(\Omega_{X/K}) = \emptyset$.
このことから

$$X \sim {}^{\exists}X_0 \otimes_k K$$

と descent できる.

補題 (Deschamps). 次の完全列

$$0 \to f^*\Omega_K \to \Omega_X \to \Omega_{X/K} \to 0$$

が global に split し、$\omega_{X/K}^{\otimes m}$ が base point free ならば、

$$X \underset{K\text{-双有理}}{\sim} {}^{\exists}X_0 \otimes_k K.$$

$Z_K \subseteq \mathbb{P}(\Omega_X) \setminus \mathbb{P}(\Omega_{X/K})$ により

$$0 \to (f^*\Omega_K)_{(Z_K)} \to \Omega_{X(Z_K)} \to \Omega_{X/K(Z_K)} \to 0$$

が split するから、trace を使って global な splitting が引き起こされる.

補題 (Deschamps, —). $\mathcal{L}$ が可逆層、$E$ が連接層, $E/\mathcal{L}$ は $\mathcal{O}_X$-flat とする.
このとき、

$$0 \to \mathcal{L} \to E \to E/\mathcal{L} \to 0 \quad \text{(完全)}$$

と、X-スキーム T に対して

$$T \rightsquigarrow \{\theta \,;\, 0 \to \mathcal{L}_{(T)} \underset{\theta}{\rightleftarrows} E_{(T)} \to (E/\mathcal{L})_{(T)} \to 0\}$$

は $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(E/\mathcal{L})$ で表現される.

□

(注)

$\{C_\lambda \mid C_\lambda$ は f の section で $(K_V \cdot C_\lambda)$ が有界 $\}$
が V で dense となっていることを示しさえすれば、予想は証明される。

Reference

[1] S. Arakelov : Families of algebraic curves with fixed degeneracy, Izv. Akad. Nauk. 35 (1971)

[2] M. Deschamps : Courbes de genre géometrique borné sur une surface de type general d'après F. A. Bogomolov, Sém. Bourbaki 30e année 1977/78 n°519.

[3] ———— : Surface de type general (ou fondamental) et de type ($T_2$) sur un corps de fonctions (charac-terisique 0) These de Doctorat, 1976.

[4] G. Faltings : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Inv. math. 73 346-366 (1983).

[5] K. Maehara : A finiteness property of Varieties of general type, Math. Ann. 262, 101-123 (1983)

[6] J. Noguchi : A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields, Math Ann. 258, 207-212 (1981)

[7] A.N. Parsin : Algebraic curves over function fields I, Isv. Akad. Nauk, 32 (1968)

[8] P. Samuel : Complément à une article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell, Publ. Math. I.H.E.S. n°29 (1966)

[9] L. Szpiro : Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov. Asterisque 64, 169-202 (1979).

[10] J. Noguchi : 日本数学会講演 (秋. 1983)